



---

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ/SYSTEM ANALYSIS,  
MANAGEMENT AND PROCESSING OF INFORMATION**

---

DOI: <https://doi.org/10.60797/itech.2026.10.5> EDN: WRFRIT**ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЁРА С ПОВОРОТНЫМИ ШТРАФАМИ: ПОСТАНОВКА ПО ТРОЙКАМ ВЕРШИН И  
АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ**

Научная статья

**Голод Г.М.<sup>1,\*</sup>**<sup>1</sup>Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Российская Федерация

\* Корреспондирующий автор (germangolod[at]gmail.com)

**Аннотация**

В статье рассматривается классическая задача коммивояжёра (TSP) и её вариация для маршрутизации на графах с поворотными штрафами, когда стоимость маршрута зависит не только от выбранных рёбер, но и от последовательности двух смежных переходов (троек вершин). Данная постановка формализуется через функцию стоимости второго порядка и соотносится с квадратичной задачей коммивояжёра (QTSP) и угловой постановкой (angular TSP). Представлен теоретический обзор результатов по сложности, аппроксимациям и наиболее эффективным алгоритмическим подходам к TSP. Предложены две взаимодополняющие схемы решения turn-cost модели: точная MILP-формулировка с линеаризацией тройных переходов и стандартными ограничениями на подтуры для малых и средних размеров, а также масштабируемая эвристическая схема для больших графов, основанная на разрежении кандидатных рёбер, локальном поиске типа k-орт и инкрементальном пересчёте поворотной компоненты целевой функции. Обсуждаются вычислительные ограничения моделей, оценка роста числа учитываемых троек при разрежении и область применимости подходов для задач практической маршрутизации.

**Ключевые слова:** задача коммивояжёра, маршрутизация, штраф поворота, стоимость по тройкам, угловой TSP, QTSP, целочисленное программирование, MILP, локальный поиск, 2-орт, k-орт, разрежение кандидатов.

**THE TRAVELLING SALESMAN PROBLEM WITH TURN PENALTIES: THE THREE-VERTEX PLACEMENT  
PROBLEM AND ALGORITHMIC SOLUTION SCHEMES**

Research article

**Golod G.M.<sup>1,\*</sup>**<sup>1</sup>Moscow Engineering Physics Institute, Moscow, Russian Federation

\* Corresponding author (germangolod[at]gmail.com)

**Abstract**

The article examines the classic travelling salesman problem (TSP) and its variant for routing on graphs with turn penalties, where the cost of a route depends not only on the selected edges but also on the sequence of two adjacent transitions (triplets of vertices). This problem is formalised via a second-order cost function and corresponds to the quadratic travelling salesman problem (QTSP) and the angular travelling salesman problem (angular TSP). A theoretical overview of results on complexity, approximations and the most efficient algorithmic approaches to the TSP is presented. Two complementary solution schemes for the turn-cost model are proposed: an exact MILP formulation with linearisation of triple transitions and standard sub-tour constraints for small and medium-sized graphs, as well as a scalable heuristic scheme for large graphs, based on candidate edge pruning, a k-opt-type local search, and incremental recalculation of the turn component of the objective function. The computational limitations of the models, an evaluation of the growth in the number of triples taken into account during pruning, and the scope of applicability of the approaches for practical routing problems are discussed.

**Keywords:** travelling salesman problem, routing, turn penalty, cost-by-trip, TSP corner, QTSP, integer programming, MILP, local search, 2-opt, k-opt, candidate pruning.

**Введение****1.1. Актуальность и контекст**

Задача коммивояжёра (TSP) является базовой моделью комбинаторной оптимизации и используется как эталон при развитии точных и эвристических методов решения NP-трудных задач. Современные обзоры подчёркивают, что даже при наличии сильных теоретических результатов (классические динамические схемы, аппроксимационные гарантии для метрических случаев, развитие MILP/branch-and-cut подходы) практическое масштабирование на сотни тысяч и миллионы узлов требует локального поиска, разрежения соседств и вычислительной инженерии.

В транспортных и навигационных приложениях стоимость движения часто зависит не только от ребра  $(j,k)$ , но и от предыдущего шага  $(i,j)$ : повороты создают задержки на перекрёстках, ограничения по радиусу и дополнительные риски манёвра. Это приводит к модели второго порядка, где вклад определяется тройками  $i \rightarrow j \rightarrow k$ , и требует корректной постановки и алгоритмической адаптации локального поиска, особенно при больших  $n$ .

**1.2. Цель и вклад**

Цель: формализовать TSP с поворотными штрафами и предложить вычислительно реализуемый метод решения, согласованный с масштабированием.

Основной вклад:



1. Модель Turn-TSP со стоимостью по тройкам и нормализацией поворотного штрафа (для интерпретируемости  $\lambda$ ).
2. MILP-постановка с линеаризацией троек (для малых  $n$ /эталонных оценок).
3. Turn-aware эвристика: жадная инициализация второго порядка + локальный поиск 2-opt/k-opt по  $F$  с кандидатным разрежением и локальным пересчётом  $\Delta F$ ; монотонность обеспечивается правилом принятия  $\Delta F < 0$ .
4. Минимальная экспериментальная валидация на Rand2D и Grid инстансах, демонстрирующая эффект при  $\lambda > 0$ .

## Методы и принципы исследования

### 2.1. Постановка задачи: стоимость по тройкам и нормализация

Пусть задано множество вершин  $V = \{1, \dots, n\}$  и базовые стоимости переходов  $d_{jk} \geq 0$  (например, евклидово расстояние). Введём штраф поворота

$$p : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad p(i, j, k) - \text{штраф при фрагменте } i \rightarrow j \rightarrow k.$$

Ищется гамильтонов цикл  $\tau = (v_1, \dots, v_n, v_1)$ , минимизирующий

$$F(\tau) = D(\tau) + \lambda P(\tau) = \sum_{t=1}^n d(v_t, v_{t+1}) + \lambda \sum_{t=1}^n \tilde{p}(v_{t-1}, v_t, v_{t+1})$$

где индексы по модулю  $n$ ,  $\lambda \geq 0$  — вес важности поворотов,  $\tilde{p}$  — нормализованный штраф.

Замечание 1 (Зачем нужна нормализация). Без нормализации масштаб  $P$  может доминировать или исчезать относительно  $D$  в зависимости от инстанса. Для углового штрафа удобно задавать

$$\tilde{p}(i, j, k) = \frac{\theta(i, j, k)}{\pi} \in [0, 1]$$

где  $\theta$  — угол поворота в вершине  $j$ . Тогда  $\lambda$  становится сопоставимым между инстансами.

### 2.2. Пример: «стоимость поворота» через угол

Пусть вершинам соответствуют координаты  $x_v \in \mathbb{R}^2$ . Тогда для тройки  $i \rightarrow j \rightarrow k$  определим угол

$$\theta(i, j, k) = \arccos \frac{(x_i - x_j) \cdot (x_k - x_j)}{\|x_i - x_j\| \cdot \|x_k - x_j\|} \in [0, \pi],$$

и положим  $\tilde{p}(i, j, k) = \theta(i, j, k) / \pi$ . Подобные угловые постановки и разрежение для них рассматриваются в современных работах.

### 2.3. Точная MILP-модель (для малых $n$ и эталонных оценок)

Введём бинарные переменные

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \text{ (дуга } i \rightarrow j \text{ в туре)}, \quad z_{ijk} \in \{0, 1\} \text{ (в туре встречается } i \rightarrow j \rightarrow k \text{)}.$$

Цель:

$$\min \sum_{i \neq j} d_{ij} x_{ij} + \lambda \sum_{i, j, k} \tilde{p}_{ijk} z_{ijk}.$$

Ограничения «один вход/один выход»:

$$\sum_{j \neq i} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V, \\ \sum_{j \neq i} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in V.$$

Линеаризация троек:

$$z_{ijk} \leq x_{ij}, \\ z_{ijk} \leq x_{jk}, \\ z_{ijk} \geq x_{ij} + x_{jk} - 1$$

для всех допустимых  $i, j, k$ . Подтуры исключаются стандартными для TSP средствами (MTZ или плоскости отсечения); детальное обсуждение современных точных/аппроксимационных подходов и условий применимости приведено в обзорах.

Замечание 2. MILP с тройками имеет  $O(n^3)$  переменных  $z_{ijk}$  в полном виде, поэтому применяется на малых  $n$  или при разрежении множества троек.

### 2.4. Эвристический метод: разрежение + второй порядок + turn-aware 2-opt

Метод ориентирован на масштабирование и опирается на ключевые принципы современных TSP-эвристик: локальный поиск, разрежение соседств и вычислительная эффективность.

#### 2.4.1. Кандидатные множества (ограничение степени)

Для каждой вершины  $j$  строится список  $Cand(j)$  из  $K$  ближайших соседей по  $d_{jk}$  (обычно  $K \in [8, 15]$ , в частности  $K \leq 10$  как практический компромисс). Далее при локальном поиске рассматриваются перестройки, использующие рёбра преимущественно из  $Cand(\cdot)$ , что уменьшает число проверяемых вариантов.

#### 2.4.2. Начальное решение второго порядка

Начальный тур строится жадно по критерию второго порядка. При текущем конце тура  $(v_{t-1}, v_t)$  следующая вершина  $u$  выбирается как

$$k = \operatorname{argmin}_{u \notin \tau} [d(v_t, u) + \lambda \tilde{p}(v_{t-1}, v_t, u)].$$

Тем самым поворотный штраф учитывается уже на этапе построения.

#### 2.4.3. Как модифицируется 2-орт под второй порядок: локальный $\Delta F$

В классическом 2-орте выбираются две дуги  $(a, b)$  и  $(c, d)$  в текущем туре и выполняется перестройка, приводящая к замене на  $(a, c)$  и  $(b, d)$  (с разворотом промежуточного сегмента). Для цели первого порядка пересчитывается только вклад четырёх рёбер. Для цели второго порядка меняются также штрафы для троек около точек разрыва/склейки.

Ключевое наблюдение: 2-орт влияет на ограниченное число локальных троек возле вершин  $\{a, b, c, d\}$  (и их соседей по туру). Поэтому  $\Delta F = \Delta D + \lambda \Delta P$  можно вычислять локально, без пересчёта всего  $F(\tau)$ , что критично по скорости.

Утверждение 1 (Монотонность). Если 2-opt/k-opt перестройка применяется только при  $\Delta F < 0$ , то последовательность  $F(\tau)$  строго убывает; алгоритм завершается в локальном минимуме относительно выбранного класса перестроек.



$V$ ,  $d_{ij}$ ,  $\tilde{p}_{ijk}$ ,  $\lambda \geq 0$ , параметр кандидатов  $K$  тур  $\tau$  Построить  $Cand(j):K$  ближайших соседей по  $d$  для каждого  $j$  Построить начальный тур  $\tau$  жадно по критерию  $d + \lambda \tilde{p}$  improved  $\leftarrow$  false . Сформировать 2-орт-кандидата (пара разрезов), соответствующего замене рёбер. Вычислить  $\Delta D$  по изменённому рёбрам. Вычислить  $\Delta P$  по локально затронутым тройкам вокруг разрезов/склеек. Применить 2-орт перестройку improved  $\leftarrow$  true  $\tau$

### 2.5. Пояснение вычислительной сложности (что означают $O(n^2)$ , $O(nK)$ , $O(n^3)$ )

- Без разрежения: полный перебор 2-орт даёт  $O(n^2)$  кандидатов на один «проход». Если при каждом кандидате пересчитывать  $F$  целиком за  $O(n)$ , получится  $O(n^3)$  на проход.

- С локальным  $\Delta F$ : оценка одного кандидата делается за  $O(1)$  (константное число рёбер и локальных троек), поэтому полный 2-орт проход  $O(n^2)$ .

- С кандидатами размера  $K$ : перебор сокращается до порядка  $O(nK)$ , а при локальном  $\Delta F$  один проход становится  $O(nK)$ . Именно поэтому ограничение степени (например,  $K \leq 10$ ) практически значимо и объясняет наблюдаемое масштабирование.

## Основные результаты

### 3.1. Экспериментальная постановка

Использованы два класса инстансов:

1. Rand2D\_ $n$ : точки равномерно на  $[0,1]^2$ ,  $n \in \{100, 300, 800\}$ .

2. Grid\_25x25: решётка  $25 \times 25$  (625 вершин), как простой прокси «дорожной» структуры.

Базовая стоимость  $d_{ij}$  — евклидово расстояние. Штраф  $\tilde{p}$  — нормализованный угол  $\theta/\pi$ . Сравнивались:

- Baseline: Nearest Neighbor + 2-орт, оптимизирующие только  $D$ ; затем вычисление  $F$  при разных  $\lambda$ .

- TurnAware: жадная инициализация по  $D + \lambda P$  + turn-aware 2-орт по  $F$  с локальным  $\Delta F$  и разрежением.

В качестве контрольной проверки при  $\lambda=0$  оба метода должны совпадать по целевой функции, что и наблюдается.

### 3.2. Результаты (выдержка при $\lambda=1$ )

Таблица 1 иллюстрирует характерный эффект: TurnAware уменьшает поворотную компоненту  $P$  и общую цель  $F$ ; длина  $D$  может умеренно увеличиваться, что соответствует смыслу штрафов поворота.

Таблица 1 - Сравнение Baseline и TurnAware при  $\lambda=1,0$

DOI: <https://doi.org/10.60797/itech.2026.10.5.1>

Инстанс	n	$F_{base}$	$F_{turn}$	$\Delta F$ , %	$P_{base}$	$P_{turn}$	$\Delta P$ , %
Grid_25x25	625	2469,1	1286,3	47,9	1823,2	396,8	78,2
Rand2D_100	100	227,6	56,9	75,0	219,5	19,2	91,3
Rand2D_300	300	626,2	119,5	80,9	611,3	45,7	92,5
Rand2D_800	800	1667,9	234,8	85,9	1643,0	90,1	94,5

Примечание: цель  $F=D+\lambda P$

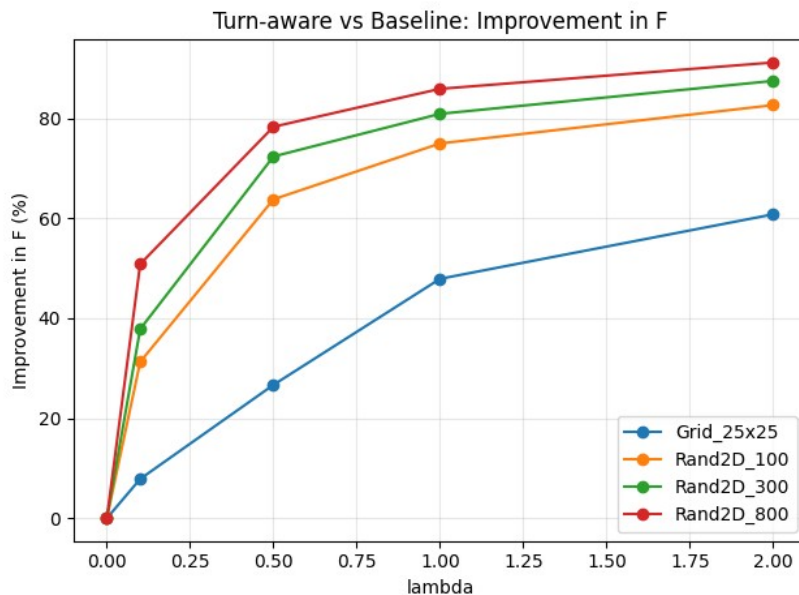


Рисунок 1 - График зависимости эффекта от  $\lambda$   
DOI: <https://doi.org/10.60797/itech.2026.10.5.2>

Рисунок 1 демонстрирует рост выигрыша TurnAware по  $F$  при увеличении  $\lambda$ .

TurnAware vs Baseline: улучшение по  $F=D+\lambda P$  в зависимости от  $\lambda$  на Rand2D и Grid-инстансах.

### 3.3. Вычислительные затраты

Baseline заметно быстрее, так как оптимизирует только  $D$  и использует простой локальный критерий. TurnAware требует дополнительного времени на (i) построение второго порядка и (ii) оценку перестроек по  $F$ , однако разрежение и локальный  $\Delta F$  делают метод практичным на сотнях и тысячах вершин, что согласуется с наблюдениями о масштабировании современных локальных эвристик.

## Обсуждение

### 4.1. Интерпретация и практический смысл

Эксперименты показывают:

- При  $\lambda=0$  методы совпадают (контроль корректности).
- При  $\lambda>0$  TurnAware резко снижает  $P$  и тем самым  $F$ .
- Увеличение  $D$  при росте  $\lambda$  интерпретируется как компромисс: маршрут становится «плавнее» (меньше резких манёвров), что соответствует прикладным требованиям (время на поворот, безопасность, энергоэффективность).

### 4.2. Ограничения и минимальные улучшения «до принятия»

- Для редакционной версии желательно добавить 3–5 повторов на каждом инстансе (разные seed) и вывести среднее и стандартное отклонение по  $F$ ; это недорого по времени, но заметно повышает убедительность.
- Для малых  $n$  (например,  $n \leq 60$ ) можно решить MILP (или получить нижнюю оценку) и показать относительный разрыв (gap) эвристики; это закрывает вопрос о «точности» без громоздкой экспериментальной части.

## Заключение

В статье предложена корректная постановка маршрутизации с поворотными штрафами как задачи второго порядка с целью  $F=D+\lambda P$ , приведена MILP-модель с линеаризацией троек и разработан масштабируемый эвристический контур: жадная инициализация второго порядка и turn-aware локальный поиск 2-opt/ $k$ -opt на кандидатном пространстве с локальным пересчётом  $\Delta F$ . Минимальная экспериментальная валидация на Rand2D и Grid инстансах демонстрирует существенное улучшение полной цели при  $\lambda>0$  при приемлемых вычислительных затратах, что согласуется с общими принципами современных TSP-решателей (разрежение соседств, локальные перестройки, инженерия вычислений).



### Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность Т-Банку за инициативы, направленные на поддержку научных исследований и развитие академической среды. Реализуемые банком программы стали значимым источником мотивации и вдохновения при подготовке настоящей работы и способствовали углублённой проработке исследуемой темы.

### Конфликт интересов

Не указан.

### Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

### Acknowledgement

The author expresses sincere gratitude to T-Bank for its initiatives aimed at supporting scientific research and fostering the academic community. The programmes implemented by the bank have been a significant source of motivation and inspiration in the preparation of this work and have contributed to an in-depth exploration of the research topic.

### Conflict of Interest

None declared.

### Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

### Список литературы на английском языке / References in English

1. Saller S. A survey on approximability and exact algorithms for the traveling salesman problem variants / S. Saller, J. Koehler, A. Karrenbauer // *Annals of Operations Research*. — 2025. — № 351. — P. 2129–2190. — DOI: 10.1007/s10479-025-06641-5.
2. Alanzi A. Solving the traveling salesman problem with machine learning: a review of recent advances and challenges / A. Alanzi, M.E. Menai // *Artificial Intelligence Review*. — 2025. — № 58. — P. 267. — DOI: 10.1007/s10462-025-11267-x.
3. Sui J. A survey on deep learning-based algorithms for the traveling salesman problem / J. Sui, S. Ding, X. Huang [et al.] // *Front. Comput. Sci.* — 2025. — Vol. 19. — Art. 196322. — DOI: 10.1007/s11704-024-40490-y
4. Mariescu-Istodor R. Solving the Large-Scale TSP Problem in 1 h: Santa Claus Challenge 2020 / R. Mariescu-Istodor, P. Fränti // *Frontiers in Robotics and AI*. — 2021. — Vol. 8. — Art. 689908. — DOI: 10.3389/frobt.2021.689908.
5. Taillard É.D. A linearithmic heuristic for the travelling salesman problem / É.D. Taillard // *European Journal of Operational Research*. — 2022. — № 297 (2). — P. 442–450. — DOI: 10.1016/j.ejor.2021.05.034.
6. Formella A. A quasi-linear-time heuristic to solve the Traveling Salesman Problem / A. Formella // *Journal of Computational Science*. — 2024. — № 77. — Art. 102237. — DOI: 10.1016/j.jocs.2024.102237.
7. Skinderowicz R. Improving Ant Colony Optimization efficiency for solving large TSP instances / R. Skinderowicz // *Applied Soft Computing*. — 2022. — № 120. — Art. 108653. — DOI: 10.1016/j.asoc.2022.108653.
8. Jiongzhi Zh. A reinforced hybrid genetic algorithm for the traveling salesman problem / Zh. Jiongzhi, Zh. Jialun, Ch. Menglei [et al.] // *Computers & Operations Research*. — 2023. — № 157. — Art. 106249. — DOI: 10.1016/j.cor.2023.106249.
9. Pham Q.A. An Efficient Hybrid Genetic Algorithm for the Quadratic Traveling Salesman Problem / Q.A. Pham, H.C. Lau, M.H. Ha [et al.] // *Proceedings of ICAPS 2023*. — 2023. — DOI: 10.1609/icaps.v33i1.27212.
10. Cavagnini R. A tabu search with geometry-based sparsification methods for angular traveling salesman problems / R. Cavagnini, M. Schneider, A. Theiß // *Networks*. — 2023. — DOI: 10.1002/net.22180.